Đề bài

Cho trường:

$$\vec{F}(x,y,z) = \big(e^z \arctan(y^4),\ z^6 \ln(x^4+5),\ z\big).$$

Mặt S:

$$z = 2 - x^2 - y^2, \quad z \geq 1,$$

định hướng: lên trên.
Yêu cầu: tính thông lượng

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS.$$

Bước 0 — Nhận diện nhanh

Nhìn đề $\rightarrow$ bật ngay tư duy:

Dấu hiệu	Ý nghĩa
"Thông lượng"	$\iint F \cdot n\, dS$
Mặt cong (paraboloid)	Nghĩ Gauss
Không phải tích phân đường	Không Stokes
F rất "dị"	Tính trực tiếp sẽ khó

Kết luận: phải dùng **Định lý Gauss (Divergence)**.

Ý tưởng chủ đạo

Thông lượng qua mặt cong = tích phân divergence trên thể tích bị bao. Nhưng mặt S chưa kín, nên ta đóng nắp cho nó.

Bước 1 — Đóng mặt để dùng Gauss

Mặt S: $z = 2 - x^2 - y^2,\ z \geq 1$. Giao với mặt phẳng $z = 1$:

$$1 = 2 - x^2 - y^2 \ \Rightarrow\ x^2 + y^2 = 1.$$

Miền thể tích V: - Trên: paraboloid. - Dưới: mặt phẳng $z = 1$. - Biên đáy: hình tròn bán kính 1.

Thêm mặt đáy:

$$S_0 : \ z = 1, \ x^2 + y^2 \leq 1.$$

Công thức Gauss:

$$\iint_{S \cup S_0} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_V (\nabla \cdot \vec{F}) \, dV.$$

Bước 2 — Tính divergence

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}\big(e^z \arctan(y^4)\big) + \frac{\partial}{\partial y}\big(z^6 \ln(x^4 + 5)\big) + \frac{\partial}{\partial z}(z).$$

Tính từng thành phần:

$$\frac{\partial}{\partial x}(e^z \arctan(y^4)) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(z^6 \ln(x^4 + 5)) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(z) = 1.$$

Do đó:

$$\nabla \cdot \vec{F} = 1.$$

Bước 3 — Tính tích phân thể tích

$$\iiint_V (\nabla \cdot \vec{F}) \, dV = \iiint_V 1 \, dV = \text{Thể tích } V.$$

Mô tả miền V bằng tọa độ trụ:

$$0 \leq r \leq 1, \quad 1 \leq z \leq 2 - r^2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Tính thể tích:

$$\iiint_V dV = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_1^{2-r^2} r \, dz \, dr \, d\theta.$$

Tích phân theo z:

$$\int_1^{2-r^2} dz = 1 - r^2.$$

Do đó:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 r(1 - r^2)\, dr\, d\theta.$$

Theo r:

$$\int_0^1 (r - r^3)\, dr = \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

Theo θ:

$$\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.$$

Kết quả:

$$\iiint_V dV = 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Bước 4 — Trừ thông lượng qua mặt đáy S_0

Mặt S_0: $z = 1$, pháp tuyến hướng xuống $\vec{n} = (0, 0, -1)$.

Trường trên S_0:

$$\vec{F} = \big(e \arctan(y^4),\ \ln(x^4 + 5),\ 1\big).$$

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = -1.$$

Tích phân mặt đáy:

$$\iint_{S_0} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_{x^2+y^2\le 1} (-1)\, dA = -\pi.$$

Bước 5 — Suy ra thông lượng qua S

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F}\, dV - \iint_{S_0} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS.$$

$$= \frac{\pi}{2} - (-\pi) = \frac{3\pi}{2}.$$

Kết luận cuối

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \frac{3\pi}{2}.$$

Tóm tắt "học tủ đi thi"

- Thông lượng + mặt cong $\rightarrow$ Gauss.
- Divergence = 1 $\rightarrow$ chỉ cần tính thể tích.
- Mặt hở $\rightarrow$ đóng nắp rồi trừ.